

# Induktivnosti asinhronskega motorja s kratkostično kletko

Klemen Drobnič, Henrik Lavrič, Vanja Ambrožič in Rastko Fišer

Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, SI – 1000 Ljubljana  
E-pošta: klemen.drobnic@fe.uni-lj.si

## Inductances of squirrel-cage induction motor

*Modelling of squirrel-cage induction motor has traditionally relied on generalization of wound-rotor induction motor claiming their nearly identical operational characteristics. However, the distribution of rotor windings differs profoundly among the two types, as the squirrel-cage rotor features non-sinusoidal distribution of bars along the air-gap. In this paper, a model of squirrel-cage induction motor is derived based on the actual geometry of stator windings and rotor loops. Various types of inductances which are instrumental to the description of the model are computed by means of winding function.*

## 1 Uvod

Modeliranje električnih strojev z analitičnimi orodji ponuja časovno optimiziran izračun obratovalnih stanj, pri čemer je čas izvajanja računskega algoritma nekaj redov velikosti hitrejši od numeričnega izračuna, temelječega na uporabi osnovnih postulatov elektromagnetike (npr. metoda končnih elementov). Ni dvoma, da z analitičnim pristopom ne moremo zaobjeti vseh detajlov pogojenih s konstrukcijo in materialom, lahko pa s pravilno parametrizacijo in ustreznim modelom dobimo zelo dober računski približek.

Asinhronski motor (AM) s kratkostično kletko tradicionalno modeliramo kot posplošitev AM z navitim rotorjem, kjer imata tako stator kot rotor sinusno porazdeljena navitja enakega števila faz. Očitno je, da za kratkostično kletko tega ne moremo trditi, saj so rotorske palice enakomerno porazdeljene vzdolž rotorskega oboda in nikakor ne tvorijo porazdeljenega navitja sinusne oblike. Funkcionalno enačenje teh dveh rotorskih tipov je zato bolj ali manj izkustveno utemeljeno, tj. na podlagi (očitno) enakih obratovalnih lastnosti.

V prispevku je prikazan način modeliranja AM, ki se ne izogne konstrukcijski stvarnosti kratkostične kletke. Kletko z  $m$  palicami nadomestimo z  $m + 2$  zankami (dve enačbi opisujeta zanki kratkostičnega obroča), pri čemer upoštevamo, da je posamezna zanka magnetno sklopljena z vsemi preostalimi. Vsa statorska navitja in rotorske zanke obravnavamo enako ter jih opišemo s funkcijo navitja, ki je zelo primerno orodje za izračun lastnih in medsebojnih induktivnosti. Zaradi velikega števila elementov je matrični zapis induktivnosti najbolj prikladen pri končnem izrazu za magnetni sklep.

## 2 Enačbe asinhronskega stroja

Temeljni napetostni enačbi AM v matrični obliki sta

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \frac{d\mathbf{\Psi}_s}{dt} \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \frac{d\mathbf{\Psi}_r}{dt}, \quad (2)$$

za dopolnitev opisa AM je potrebno definirati še zvezo med tokom in magnetnim sklepom

$$\mathbf{\Psi}_s = \mathbf{\Psi}_{ss} + \mathbf{\Psi}_{sr} = \mathbf{L}_{ss} \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_{sr} \mathbf{I}_r \quad (3)$$

$$\mathbf{\Psi}_r = \mathbf{\Psi}_{rs} + \mathbf{\Psi}_{rr} = \mathbf{L}_{rs} \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_{rr} \mathbf{I}_r. \quad (4)$$

Mastna pisava označuje vektorsko (oz. matrično) naravo spremenljivk:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= (u_{sa} \ u_{sb} \ u_{sc}) \\ \mathbf{I}_s &= (i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}) \\ \mathbf{U}_r &= (0 \ 0 \ \dots \ 0) \\ \mathbf{I}_r &= (i_{r1} \ i_{r2} \ \dots \ i_{rm}), \end{aligned}$$

pri čemer statorske količine nosijo indeks  $s$ , rotorske količine  $r$ . Zaradi enostavnosti obravnavamo dvopolni stroj s trifaznim statorskim navitjem (faze indeksirane s črkami  $a$ ,  $b$  in  $c$ ) in kratkostično kletko z  $m$  palicami oz. zankami, ki so indeksirane s številkami  $1, \dots, i, \dots, m$ . Cilj je določitev statorskega in rotorskega magnetnega sklepa ( $\mathbf{\Psi}_s$  in  $\mathbf{\Psi}_r$ ), za kar je potrebno poprej izračunati induktivnosti navitij (3–4).

## 3 Funkcija navitja

Funkcija navitja (FN, ang. Winding function) je matematično orodje, ki ima na področju električnih strojev tri pomembne aplikacije. Z njeno pomočjo določimo: a) magnetno napetost v zračni reži poljubnega (tudi porazdeljenega) navitja, b) magnetni sklep navitja ter c) lastne in medsebojne induktivnosti navitij. Aplikacija FN sloni na geometrijskem opisu porazdelitve vodnikov po obodu stroja. Ker se omejujemo na AM s kratkostično kletko, nas zanimajo porazdeljena navitja na statorju in enostavna navitja oz. zanke na rotorju [1].

### 3.1 Statorska navitja

Osnovna naloga elektromehanskega pretvornika je ustvarjanje konstantnega navora na gredi, zato stremimo k čimbolj zvezni porazdelitvi vodnikov. Temu idealu se zaradi

končnih dimenzij vodnikov in prostora za sklenitev magnetne poti lahko zgolj približamo.

Želja je, da je porazdelitev vodnikov posamezne statorske faze po obodu sinusne oblike, kar za fazo  $a$  zapišemo

$$n_{sa}(\gamma) = N_{s1} \sin(\gamma), \quad (5)$$

kjer je  $\gamma$  mehanski kot po obodu statorja z izhodiščem v magnetni osi faze  $a$ . Dejansko število vodnikov faze  $a$ , ki je potrebno za fizično realizacijo (5), izračunamo preko

$$N_{sa} = \int_0^{2\pi} n_{sa}(\gamma) h(\gamma) d\gamma = 2N_{s1}, \quad (6)$$

kjer je  $h(\gamma)$  enotska skočna funkcija.

Diskretna oblika funkcije navitja  $W_{sa,k}$  opisuje, kolikokrat statorsko navitje faze  $a$  objema magnetni pretok, ki prehaja skozi posamezen statorski zob  $k \in 1, \dots, K$ . To količino lahko izrazimo v obliki rekurzivne enačbe za  $k$ -ti zob

$$W_{sa,k+1} = W_{sa,k} - N_{sa,k}. \quad (7)$$

Dokaz enačbe (7) je možen s premislekom (slika 1). Če tor  $k$  vsebuje  $N_{sa,k}$  vodnikov in so vsi pozitivno usmerjeni ( $\odot$ ), potem jih lahko razdelimo v dve skupini. V skupini  $a$  so vodniki, ki na sprednjem delu stroja zavijejo nazaj in so torej del zanke okoli  $k$ -tega zoba. Hkrati to pomeni, da ti vodniki ne oklepajo pretoka v  $k+1$ -em zobu. V skupini  $b$  pa so vodniki, ki zavijejo naprej in zato ne oklepajo pretoka  $k$ -tega zoba, a oklepajo pretok  $k+1$ -ega zoba v negativni smeri (pozitivna smer pretoka je od rotorja k statorju).

Enačbo (7) lahko zapišemo tudi drugače

$$W_{sa,k+1} = W_{sa,1} - \sum_{j=1}^{k-1} N_{sa,j}. \quad (8)$$

Začetno vrednost  $W_{sa,1}$  določimo s pomočjo lihe simetrije glede na pol  $W_{sa,1+K/2} = -W_{sa,1}$

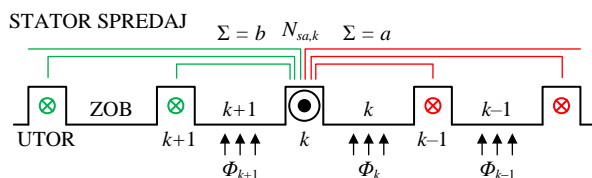
$$W_{sa,1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K/2} N_{sa,j}. \quad (9)$$

Izpeljavo funkcije navitja na podlagi zveznega opisa navitja se lotimo s pomočjo linearizirane enačbe

$$w_{sa}(\gamma + \Delta\gamma) = w_{sa}(\gamma) - n_{sa}(\gamma)\Delta\gamma, \quad (10)$$

po preureditvi in  $\Delta\gamma \rightarrow 0$  dobimo

$$\frac{dw_{sa}(\gamma)}{d\gamma} = -n_{sa}(\gamma). \quad (11)$$



Slika 1: K rekurzivni enačbi funkcije navitja

FN lahko izračunamo z

$$w_{sa}(\gamma) = - \int_0^{\gamma} n_{sa}(\gamma) d\gamma + w_{sa}(0). \quad (12)$$

Manjkajoča vrednost  $w_{sa}(0)$  je izračunana s pomočjo lihe simetrije okoli polov  $w_{sa}(0 + \pi) = -w_{sa}(0)$

$$w_{sa}(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} n_{sa}(\gamma) d\gamma, \quad (13)$$

kar vstavimo nazaj v enačbo (12)

$$w_{sa}(\gamma) = - \int_0^{\gamma} n_{sa}(\gamma) d\gamma + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} n_{sa}(\gamma) d\gamma. \quad (14)$$

FN sinusno porazdeljenega navitja (5) izračunamo s pomočjo enačbe (14)

$$w_{sa}(\gamma) = \frac{N_{sa}}{2} \cos(\gamma). \quad (15)$$

### 3.2 Rotorska navitja

Kratkostično kletko modeliramo kot sistem  $m$ -tih zank. Poljubno  $i$ -to zanko sestavljajo dva segmenta rotorskega obroča ter palici  $i$  in  $i+1$ , ki zasedata prostorsko lego  $\beta_i$  oz.  $\beta_{i+1}$  (slika 2). Ker so palice enakomerno razporejene po rotorskem obodu, lahko definiramo njun medsebojni kot

$$\Delta_r = \beta_{i+1} - \beta_i = 2\pi/m. \quad (16)$$

Posamezno rotorsko zanko sestavlja zgolj 1 ovoj, njena prostorska porazdelitev je omejena na sosednja rotorska utora  $l$  in  $l+1$ , pri čemer velja  $l \in 1, \dots, L$

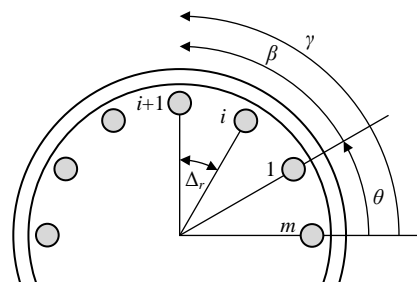
$$N_{ri,l} = \begin{cases} 1 & l = i \\ -1 & l = i+1 \\ 0 & l \neq (i, i+1) \end{cases}. \quad (17)$$

Funkcijo navitja  $i$ -te rotorske zanke izračunamo iz

$$W_{ri,l+1} = W_{ri,1} - \sum_{l=1}^{i-1} N_{ri,l} \quad (18)$$

in dobimo (zvezna oblika zapisa FN)

$$w_{ri}(\beta) = \begin{cases} W_{ri,1} + 0 & 0 < \beta \leq \beta_i \\ W_{ri,1} + 1 & \beta_i < \beta \leq \beta_{i+1} \\ W_{ri,1} + 0 & \beta_{i+1} < \beta \leq 2\pi \end{cases}. \quad (19)$$



Slika 2: Definicija koordinatnih osi

Alternativni pogled na FN je, da predstavlja prostorsko porazdelitev magnetne napetosti  $\Theta$  v zračni reži, kar omogoča določitev konstante  $W_{ri,1}$ . Slika 3 prikazuje obliko magnetne napetosti ene rotorske zanke, pri čemer se magnetna napetost med dvema deloma magnetnega kroga razdeli v razmerju magnetnih upornosti (pomemben je zgolj različen presek magnetne poti v + in - smeri)

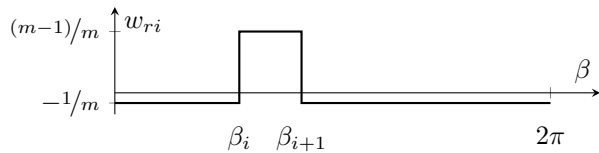
$$\frac{\Theta_-}{\Theta_+} = -\frac{2\pi/m}{2\pi - 2\pi/m} = -\frac{1}{m-1}, \quad (20)$$

kjer negativni predznak označuje nasprotno usmerjenost. Iz enačb (19) in (20) določimo  $W_{ri,1}$

$$-\frac{1}{m-1} = \frac{W_{ri,1}}{W_{ri,1} + 1} \quad (21)$$

in dobimo  $W_{ri,1} = -1/m$ . Končna oblika funkcije navitja rotorske zanke (slika 3) je

$$w_{ri}(\beta) = \begin{cases} -1/m & 0 < \beta \leq \beta_i \\ (m-1)/m & \beta_i < \beta \leq \beta_{i+1} \\ -1/m & \beta_{i+1} < \beta \leq 2\pi \end{cases} \quad (22)$$



Slika 3: Funkcija navitja  $i$ -te rotorske zanke

## 4 Statorski magnetni sklep

Delovanje AM je določeno z interakcijo med statorskimi in rotorskimi navitji, ki jih formalno opišemo z induktivnostmi. Ker je dolžina zračne reže ( $\delta$ ) konstantna, se v prostoru in času spreminjata le medsebojni induktivnosti  $L_{sr}$  in  $L_{rs}$ , medtem ko lastni induktivnosti ( $L_{ss}$  in  $L_{rr}$ ) ostajata enaki.

Funkcija navitja  $w$ , ki podaja prostorski opis poljubnega (tudi nesimetričnega) navitja, predstavlja prikladen način za izračun induktivnosti AM [2]. Pri predpostavki neskončne permeabilnosti železa in konstantne zračne reže  $\delta$  lahko induktivnost (lastno ali medsebojno) izračunamo

$$L_{xy} = \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} w_x(\gamma, \theta) w_y(\gamma, \theta) d\gamma, \quad (23)$$

kjer je  $\gamma$  kot vzdolž zračne reže glede na stator,  $\theta$  kot med statorjem in rotorjem,  $l$  aksialna dolžina navitja ter  $r$  srednji polmer zračne reže. Indeks  $x$  in  $y$  označujeta (dve) poljubni navitji.

### 4.1 Statorski magnetni sklep zaradi statorskih tokov

Statorski magnetni sklep zaradi statorskih tokov se za trofazno sinusno porazdeljeno navitje glasi

$$\begin{pmatrix} \psi_{sas} \\ \psi_{sbs} \\ \psi_{scs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{sa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{sb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{sc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

kjer za fazo  $a$  velja  $L_{sa} = L_{a\sigma} + L_{aa}$ . Lastno statorsko induktivnost  $L_{aa}$  lahko izračunamo tako, da v (23) vstavimo funkcijo navitja (14)

$$\begin{aligned} L_{aa} &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} w_{sa}^2 d\gamma = \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} \left( \frac{N_{sa}}{2} \cos(\gamma) \right)^2 d\gamma \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} N_{sa}^2 \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

Za preostali fazi velja  $L_{aa} = L_{bb} = L_{cc}$ . Iznos medsebojnih induktivnosti  $L_{xy}$ , kjer je  $x, y \in a, b, c$  in  $x \neq y$ , znaša  $-L_{aa}/2$ . Stresano statorsko induktivnost  $L_{a\sigma}$  je potrebno izračunati drugače.

### 4.2 Statorski magnetni sklep zaradi rotorskih tokov

Prispevek rotorskih tokov k statorskemu magnetnemu sklepu ovrednotimo

$$\begin{pmatrix} \psi_{sar} \\ \psi_{sbr} \\ \psi_{scr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{a1} & L_{a2} & \dots & L_{am} \\ L_{b1} & L_{b2} & \dots & L_{bm} \\ L_{c1} & L_{c2} & \dots & L_{cm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \dots \\ i_{rm} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

$L_{xy}$  predstavlja medsebojno induktivnost statorske faze  $x \in a, b, c$  in rotorske zanke  $y \in 1, \dots, m$ . Ker sta integracijski spremenljivki statorske in rotorske FN različni, ju moramo uskladiti. Vpeljemo zamenjavo  $\gamma = \beta + \theta$  ter izračunamo medsebojno induktivnost faze  $a$  in zanke  $i$

$$\begin{aligned} L_{ai} &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} w_{sa}(\beta + \theta) w_{ri}(\beta) d\beta \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \left( -\frac{1}{m} \left[ \sin(\beta + \theta) \Big|_0^{(i-1)\Delta_r} + \sin(\beta + \theta) \Big|_{i\Delta_r}^{2\pi} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-1}{m} \left[ \sin(\beta + \theta) \Big|_{(i-1)\Delta_r}^{i\Delta_r} \right] \right) \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} (\sin(\theta + i\Delta_r) - \sin(\theta + (i-1)\Delta_r)) \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} 2 \sin\left(\frac{\Delta_r}{2}\right) \cos\left(\theta + (i-1)\Delta_r + \frac{\Delta_r}{2}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Medsebojne induktivnosti faz  $b$  in  $c$  dobimo s prostorskim zamikom  $2\pi/3$  oz.  $4\pi/3$ . Po pričakovanju medsebojna induktivnost izkazuje odvisnost od relativnega položaja med rotorjem in statorjem (kot  $\theta$ ).

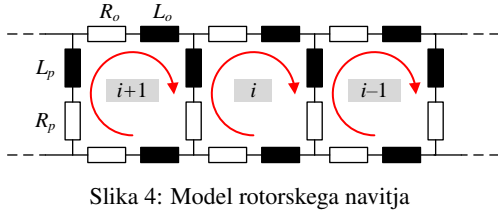
## 5 Rotorski magnetni sklep

Kratkostično kletko AM modeliramo kot sistem  $m$ -tih magnetno sklopljenih tokovnih zank, pri čemer so sosednje zanke prostorsko zamaknjene za  $\Delta_r = 2\pi/m$ . Zato lahko obravnavamo tudi primere, ko imamo necelo število rotorskih palic na posameznem pol ( $m/2P \neq \mathbb{N}$ ). Vsako zanko sestavljajo dve palici in dva dela rotorskega obroča, skozi katere teče zančni tok (slika 4). Napetostna enačba posamezne zanke je določena z upornostjo in induktivnostjo njenih elementov

$$0 = 2(R_p + R_o)i_{ri} - R_p(i_{r(i-1)} + i_{r(i+1)}) + \frac{d\psi_{ri}}{dt}, \quad (28)$$

kjer sta  $R_p$  in  $R_o$  upornosti palice in dela obroča ter  $\psi_{ri}$  skupni magnetni sklep v  $i$ -ti zanki. Če zapišemo zgolj uporovno matriko celotne rotorske mreže dobimo na osnovi (28) in z upoštevanjem  $R_z = 2(R_p + R_o)$

$$\begin{pmatrix} R_z & -R_p & 0 & 0 & \cdots & -R_p \\ -R_p & R_z & -R_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & R_z \end{pmatrix}. \quad (29)$$



Zadnji člen v (28) predstavlja vpliv spremembe magnetnega sklepa zaradi statorskih in rotorskih tokov ter je po obsegu mnogo kompleksnejši kot dobljena matrika rotorskih upornosti. Tako kot v analizi razmer na statorju tudi na rotorju obravnavamo vpliv tokov ločeno.

**5.1 Rotorski magnetni sklep zaradi statorskih tokov**  
Prispevek statorskih tokov k magnetnemu sklepu posamezne rotorske zanke je

$$\begin{pmatrix} \psi_{r1s} \\ \psi_{r2s} \\ \vdots \\ \psi_{rns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1a} & L_{1b} & L_{1c} \\ L_{1b} & L_{2b} & L_{2c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{c1} & L_{c2} & L_{nc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Zaradi energijskih razlogov so medsebojne induktivnosti paroma enake enačbi (26), torej velja  $L_{xy} = L_{yx}$ .

**5.2 Rotorski magnetni sklep zaradi rotorskih tokov**  
Prispevek rotorskih tokov k magnetnemu sklepu  $i$ -te rotorske zanke opišemo

$$\psi_{rir} = L_{i1}i_{r1} + L_{i2}i_{r2} + \cdots + L_{n1}i_{n1} + 2(L_p + L_o)i_{ri} - L_b(i_{r(i-1)} + i_{r(i+1)}), \quad (31)$$

kjer sta  $L_p$  stresana induktivnost palice in  $L_o$  stresana induktivnost dela obroča. Lastno induktivnost  $i$ -te zanke opišemo s parametrom  $L_{ii}$ , medtem ko njeno medsebojno induktivnost do preostalih zank opišemo z  $L_{ij}$ ,  $i \neq j$ , pri čemer velja  $x, y \in 1, \dots, m$ .

Rotorski magnetni sklep zaradi rotorskih tokov v matrični obliki je prikazan v (33), kjer je  $L_z = 2(L_p + L_o)$ .

Lahko pa s pomočjo FN določimo  $L_{ii}$  in  $L_{ij}$  induktivnost. Lastna induktivnost  $i$ -te zanke je

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} w_{ri}^2(\beta) d\beta \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \left( \int_0^{(i-1)\Delta_r} \frac{1}{m^2} d\beta + \int_{(i-1)\Delta_r}^{i\Delta_r} \frac{(m-1)^2}{m^2} d\beta + \int_{i\Delta_r}^{2\pi} \frac{1}{m^2} d\beta \right) \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \Delta_r \left( 1 - \frac{\Delta_r}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Medsebojna induktivnost  $i$ -te in  $k$ -te zanke pa znaša

$$\begin{aligned} L_{ki} &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \int_0^{2\pi} w_{ri}(\beta) w_{rj}(\beta) d\beta \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \frac{1}{m^2} \left( \int_0^{(i-1)\Delta_r} d\beta + \int_{i\Delta_r}^{(j-1)\Delta_r} d\beta + \int_{j\Delta_r}^{2\pi} d\beta \right) \\ &\quad + \frac{\mu_0 l r}{\delta} \frac{m-1}{m} \left( \int_{(i-1)\Delta_r}^{i\Delta_r} d\beta + \int_{(j-1)\Delta_r}^{j\Delta_r} d\beta \right) \\ &= \frac{\mu_0 l r}{\delta} \left( \frac{\Delta_r^2}{2\pi} - \frac{\Delta_r^2}{2\pi} - \frac{\Delta_r^2}{2\pi} \right) = -\frac{\mu_0 l r}{\delta} \frac{\Delta_r^2}{2\pi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Tako lastna kot medsebojna induktivnost sta zaradi konstantne zračne reže in predpostavljene idealne magnetne poti (neskončna permeabilnost železa) konstanti, odvisni zgolj od geometrijskih lastnosti rotorja. Stresani induktivnosti  $L_p$  in  $L_o$  sta sekundarna parametra, ki ju moramo določiti na drugačen način [1].

## 6 Zaključek

Predstavljeni postopek izračuna induktivnosti je zaradi analitičnega pristopa nadvse primeren za uporabo v simulacijskem modelu AM. Ker so vsa navitja detajlno opisana v geometrijskem smislu, lahko model s pridom uporabimo pri študiju napak/poškodb v navitju (statorskih in rotorskih) AM.

## Literatura

- [1] P. C. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff, S. Pekarek: Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, 3rd Edition, August 2013, Wiley-IEEE Press.
- [2] A. R. Munoz, T. A. Lipo: Complex Vector Model Of The Squirrel Cage Induction Machine Including Instantaneous Rotor Bar Currents, IEEE Transactions On Industry Applications, let. 35, št. 6, str. 1332–1340, nov. 1999.

$$\begin{pmatrix} \psi_{r1r} \\ \psi_{r2r} \\ \vdots \\ \psi_{rnr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} + L_z & L_{12} - L_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{1m} - L_p \\ L_{21} - L_p & L_{22} + L_z & L_{21} - L_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{m1} - L_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{m(m-1)} - L_p & L_{mm} + L_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \vdots \\ i_{rm} \end{pmatrix} \quad (33)$$