

Optimalno dušenje Helmholtzevega absorberja

Tilen Potisk, Marion van Midden, Janez Kokalj, Anja Dobravec, Daniel Svenšek

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko
E-pošta: tilen.potisk@student.fmf.uni-lj.si

Abstract

Damping of a Helmholtz absorber in a room is optimized according to the room coupling factor, the resonator frequency, and the damping of the room modes. The Helmholtz resonator is coupled to all room modes. When optimally damped, the resonator dissipates maximum acoustic power. Based on an analytical model first presented in Ref. [1], we determine the optimum damping of the Helmholtz absorber for a given set of acoustic parameters.

1 Uvod

S postavitvijo resonatorskih absorberjev v prostor lahko dušimo posamezne akustične lastne načine prostora. To je pomembno predvsem pri nizkih frekvencah, kjer so resonance prostora dobro ločene, dušenje z odprtopornimi absorberji pa neučinkovito in zaradi velikih valovnih dolžin tudi nepraktično. Helmholtzev resonatorski absorber je praviloma uglašen na željeno resonančno frekvenco prostora, ob tem pa se postavlja zanimivo in praktično relevantno vprašanje, kolikšno je v danem primeru njegovo optimalno dušenje.

Pri analizi, s katero poskušamo odgovoriti na to vprašanje, je treba upoštevati sklopitev resonatorja z vsemi akustičnimi lastnimi načini prostora in maksimizirati disipirano akustično moč. V praksi lahko nato glede na lastnosti prostora in resonatorja določimo optimalno dušenje resonatorja. V tem prispevku se osredotočimo na optimalno dušenje v vratu resonatorja, saj je to parameter, ki ga v praksi pri danih dimenzijah resonatorja in prostora najenostavneje spreminjamo. Za dano frekvenco vzbujanja določimo optimalno dušenje resonatorja v odvisnosti od sklopitvenega koeficienta absorberja s prostorom, lastne frekvence resonatorja in dušenja prostora.

2 Sklopitev resonatorja z lastnimi načini prostora

Osredotočili se bomo na območje nizkih frekvenc. Privzeli bomo, da je prostornina Helmholtzevega resonatorja mnogo manjša od prostora, njegova linearna dimenzija pa dovolj majhna v primeri z valovnimi dolžinami. Odprtina resonatorja predstavlja sekundarni točkast izvor valovanja. Zaradi enostavnosti bomo privzeli disperzijsko relacijo, ki je odvisna samo od ene komponente valovnega vektorja (k_x). Enačbe sicer veljajo za poljubno

geometrijo. Privzeli bomo tudi ortogonalnost lastnih funkcij. Čeprav lastne funkcije niso več enake lastnim funkcijam prostora s trdimi stenami, se pogosto privzame njihovo obliko, lastnim vrednostim pa dodamo še imaginarni del, ki predstavlja atenuacijo: $\lambda_n = \omega_n - ic_n$, kjer je ω_n resonančna frekvenca n -tega lastnega načina prostora, c_n pa njegov koeficient dušenja, za katerega bomo privzeli, da velja $c_n \ll \omega_n$.

Pri analizi sklopitve načinov prostora s Helmholtzevim resonatorjem sledimo referenci [2]. Valovanje v prostoru opišemo z valovno enačbo za akustični potencial Ψ , v kateri kot nehomogenost nastopata primarni (zvočilo) in sekundarni (odprtina resonatorja) izvor:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = S \dot{x} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_r) + q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

kjer je c hitrost zvoka v zraku, S presek ustja resonatorja, \dot{x} hitrost nihanja zraka v vratu resonatorja, \mathbf{r}_r lega resonatorja, q izdatnost in \mathbf{r}_s lega zvočila v prostoru. Hitrostno polje se izraža kot $\mathbf{u} = \nabla \Psi$, tlačno pa kot

$$p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2)$$

kjer je ρ gostota zraka. Akustični potencial razvijemo po lastnih funkcijah prostora $\phi_n(\mathbf{r})$,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_j \psi_j \phi_j(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

kjer so ψ_n koeficienti razvoja, za katere tako iz enačbe (1) sledi niz enačb

$$(\lambda_n^2 - \omega^2) \psi_n = \frac{x_0 S c^2}{\Lambda_n} i \omega \phi_n(\mathbf{r}_r) - \frac{c^2 q}{\Lambda_n} \phi_n(\mathbf{r}_s), \quad (4)$$

kjer je Λ_n kvadrat norme lastne funkcije $\phi_n(\mathbf{r})$,

$$\Lambda_n = \int_V dV [\phi_n(\mathbf{r})]^2. \quad (5)$$

Helmholtzev resonator opišemo kot dušeni oscilator z eno samo prostostno stopnjo $x = x_0 e^{-i\omega t}$, ki ga vzbuja akustični tlak ob njegovi odprtini:

$$(\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R) x_0 = -\frac{i\omega}{l'} \sum_j \psi_j \phi_j(\mathbf{r}_r), \quad (6)$$

pri čemer je ω_r resonančna frekvenca, R koeficient dušenja in l' efektivna dolžina ustja resonatorja. Tak resonator v celoti definira impedanca njegove odprtine,

$$Z(\omega) = \rho l' \left(R + \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{i\omega} \right). \quad (7)$$

V odsotnosti vzbujanja ($q = 0$) enačbe (4) in (6) predstavljajo homogeni sistem s sekularnimi enačbami za frekvenco ω . Če v enačbah (4) in (6) upoštevamo samo en način, je sekularna enačba

$$(\omega_n^2 - \omega^2 - 2i\omega_n c_n)(\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R) = \varepsilon_n^2 \omega_r^2 \omega^2, \quad (8)$$

kjer je ε_n t.i. sklopitveni parameter:

$$\varepsilon_n^2 = \frac{V_r [\phi_n(\mathbf{r}_r)]^2}{V |\phi_n|^2} \ll 1, \quad (9)$$

V_r je prostornina resonatorja, V prostornina prostora ter

$$|\phi_n|^2 = \frac{\Lambda_n}{V}. \quad (10)$$

V primeru, ko je $\omega_n = \omega_r$ in $R = c_n = 0$, sta lastni frekvenci sklopljenega sistema (rešitvi enačbe (8))

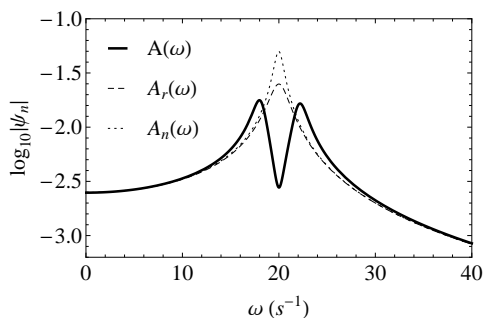
$$\omega_{1,2} \approx \omega_n \pm \frac{\varepsilon_n \omega_r}{2}. \quad (11)$$

Dobimo torej nova sklopljena načina s frekvencama, ki ležita simetrično okrog ω_n in sta približno razmaknjena za $\varepsilon_n \omega_r$, kar prikazuje tudi slika 1. Z enačbami (4) in (6) dobimo amplitude $\psi_n(\omega)$ v odvisnosti od frekvence vzbujanja v primeru končnih c_n in R . Na slikah 1, 3 in 4 jih primerjamo z amplitudami v prostoru brez resonatorja,

$$A_n(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 - 2i\omega_n c_n}, \quad (12)$$

ter z amplitudo resonatorja,

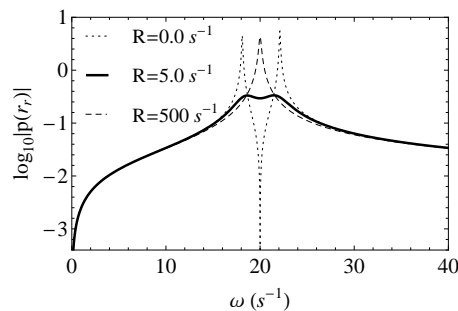
$$A_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R}. \quad (13)$$



Slika 1: Razklopitev načina ω_n na dve novi frekvenci, razmaknjena za $\varepsilon_n \omega_r = 4 \text{ s}^{-1}$, prikazana s krivuljo $A(\omega)$. Z $A_n(\omega)$ in $A_r(\omega)$ sta prikazani resonančni krivulji (absolutni vrednosti amplitud (12) in (13)) nesklapljenih prostora in Helmholtzevega resonatorja.

Slika 1 kaže primer z $\varepsilon_n = 0.2$ in $R = 1.0 \text{ s}^{-1}$. Res je, da smo znižali amplitudo na sredini, vendar smo

hkrati ustvarili nova vrha, ki nimata zanemarljivih amplitud. Če je koeficient dušenja R prevelik, postane resonančna krivulja enaka tisti brez resonatorja, slika 2. To je pričakovano, saj odprtina takega resonatorja pravzaprav predstavlja trdo steno, ki ne absorbira zvoka.

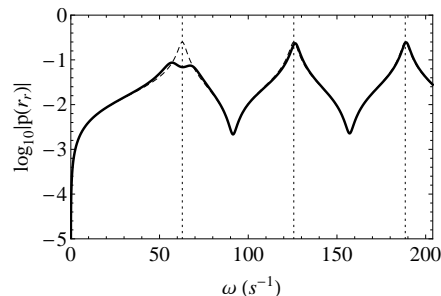


Slika 2: Logaritmično amplitudo tlaka $p(\mathbf{r}_r, \omega)$, en. (14), sklopljenega sistema resonatorja in prostora za različne vrednosti dušenja resonatorja R .

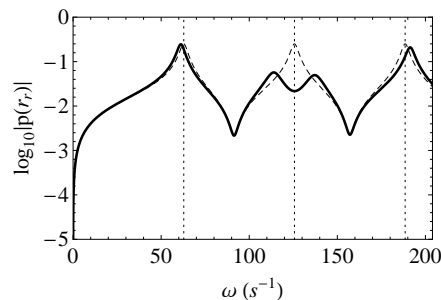
Amplitudo tlaka dobimo iz enačb (2) in (3):

$$p(\mathbf{r}) = -i\omega \rho q c^2 \frac{\sum_j \frac{\phi_j(\mathbf{r}_s) \phi_j(\mathbf{r})}{\Lambda_j (\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\omega_j c_j)}}{1 - \frac{\omega_r^2 \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R} \sum_j \frac{\varepsilon_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\omega_j c_j}}. \quad (14)$$

S primernim koeficientom dušenja R lahko krivuljo v okolici ω_n zgladimo. Sliki 3 in 4 kažeta, da je primerna vrednost R odvisna od frekvence. Na sliki 4 opazimo tudi



Slika 3: Logaritmično amplitudo tlaka $p(\mathbf{r}_r, \omega)$ pri $R = 15 \text{ s}^{-1}$, $c_n = 1.0 \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon_n = 0.2$ in $\omega_r = \omega_1 = 20\pi \text{ s}^{-1}$.



Slika 4: Logaritmično amplitudo tlaka $p(\mathbf{r}_r, \omega)$ pri $R = 15 \text{ s}^{-1}$, $c_n = 1.0 \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon_n = 0.2$ in $\omega_r = \omega_2 = 40\pi \text{ s}^{-1}$.

premik vrhov ostalih resonanc prostora zaradi sklopitve z resonatorjem. S postavitvijo odprtine resonatorja v vozle

nekega prostorskega načina se lahko izognemo sklopitvi resonatorja s tem načinom.

2.1 Absorpcija akustične moči

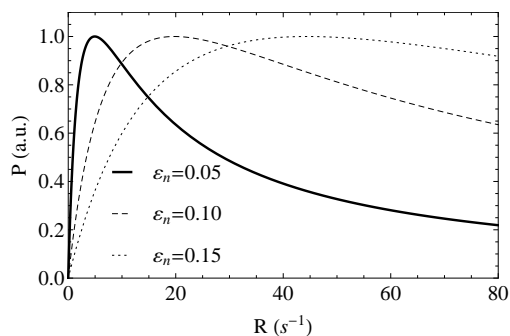
Akustična moč, ki jo prejema resonator in ki se v ravnovesju v njem disipira, je produkt volumske hitrosti in tlaka ob odprtini resonatorja:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}(p \dot{x}^*) = \frac{1}{2} S |\dot{x}|^2 \operatorname{Re}(Z). \quad (15)$$

Absorbirana moč je s tem:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \rho S l' R \omega^2 x_0^2. \quad (16)$$

Zanima nas absorpcija akustične energije v odvisnosti od R . Če upoštevamo sklopitev samo z enim prostorskim



Slika 5: Odvisnost absorpirane akustične moči od R pri treh različnih sklopitvenih parametrih ε_n in $\omega_0 = 20\pi \text{ s}^{-1}$.

načinom, se enačba (14) za tlak poenostavi:

$$p_n(\mathbf{r}) = \frac{-i\omega\rho qc^2\phi_n(\mathbf{r}_s)\phi_n(\mathbf{r})(\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R)/\Lambda_n}{(\omega_r^2 - \omega^2 - i\omega R)(\omega_n^2 - \omega^2 - 2i\omega_n c_n) - \omega_r^2\omega^2\varepsilon_n^2}. \quad (17)$$

Analitično bomo obravnavali primer $\omega = \omega_r = \omega_n \equiv \omega_0$. Ob teh privzetkih iz enačbe (16) sledi moč

$$P = P_0 \frac{\varepsilon_n^2 \omega_0^3}{R c_n^2 (1 + \varepsilon_n^2 \omega_0^2 / 2 R c_n)^2}, \quad (18)$$

$P_0 = \frac{1}{8} \rho c^2 q^2 \phi_n^2(\mathbf{r}_s) / \Lambda_n \omega_0$. Moč je maksimalna pri optimalnem dušenju

$$R_{opt} = \frac{\omega_0^2}{2c_n} \varepsilon_n^2, \quad (19)$$

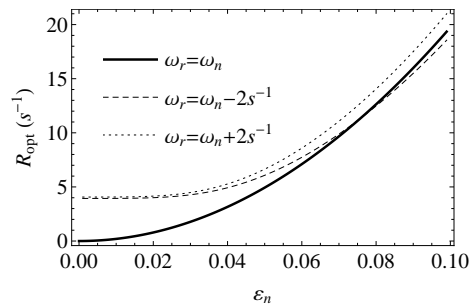
kar smo dobili tudi neposredno numerično na sliki 6.

Če se frekvenca resonatorja ne ujema popolnoma s frekvenco lastnega načina $\omega_n = \omega = \omega_0$, tako da velja $\omega_r = \omega_0 + p$, kjer je $|p| \ll \omega_0$, se izraz (19) spremeni:

$$R_{opt} = 2|p| \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0^2 \varepsilon_n^2}{2pc_n} \right)^2}. \quad (20)$$

Poleg primera za $p = 0$ sta na sliki 6 prikazana še primera za $p = \pm 2 \text{ s}^{-1}$. Za $p \neq 0$ optimalno dušenje tudi v limiti $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ostane končno:

$$R_{opt} \rightarrow 2|p|, \quad \frac{\omega_0^2 \varepsilon_n^2}{16pc_n} \ll 1. \quad (21)$$

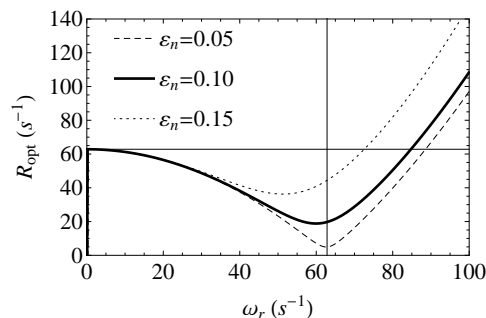


Slika 6: Optimalni koeficient dušenja R_{opt} v odvisnosti od sklopitvenega parametra ε_n pri treh različnih frekvencah resonatorja v okolici frekvence prostorskega načina $\omega_n = 20\pi \text{ s}^{-1}$.

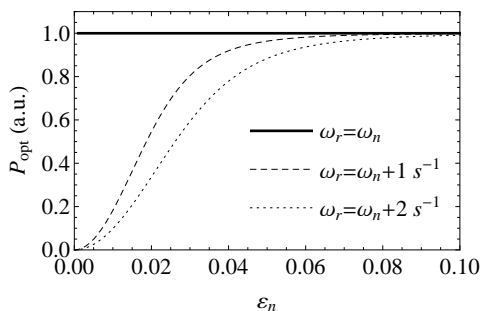
Kadar je razmik vrhov $\varepsilon_n \omega_r$, en. (11), velik v primerjavi z geometrijskim poprečjem frekvenčnega premika resonatorja in širine prostorske resonance $\sqrt{pc_n}$, pa reproduciramo limito iz enačbe (19):

$$R_{opt} \rightarrow \frac{\omega_0^2}{2c_n} \varepsilon_n^2, \quad \frac{\omega_0^2 \varepsilon_n^2}{16pc_n} \gg 1. \quad (22)$$

Oboje je lepo vidno na sliki 6. Slika 7 prikazuje razmere na širšem intervalu ω_r pri fiksni ω_n . Na sliki 8 opazimo,



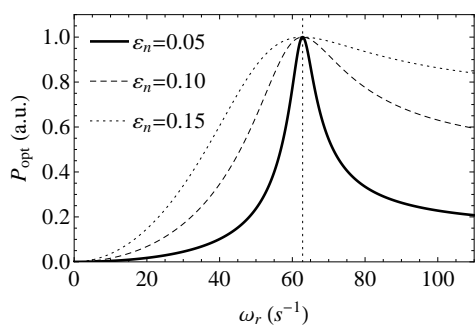
Slika 7: Optimalni koeficient dušenja R_{opt} v odvisnosti od frekvence resonatorja pri treh različnih vrednostih parametra ε_n ; označena je frekvenca prostorskega načina $\omega_n = 20\pi \text{ s}^{-1} \approx 63 \text{ s}^{-1}$.



Slika 8: Optimalna absorpirana moč P_{opt} v odvisnosti od sklopitvenega parametra ε_n pri treh različnih frekvencah resonatorja ω_r v okolici frekvence prostorskega načina ω_n .

da je v primeru $\omega_r = \omega_n$ optimirana absorpirana moč neodvisna od ε_n . Slika 9 pa prikazuje odvisnost optimirane

absorbirane moči P_{opt} od frekvence resonatorja in kaže, da je P_{opt} največja, ko je $\omega_r = \omega_n$.

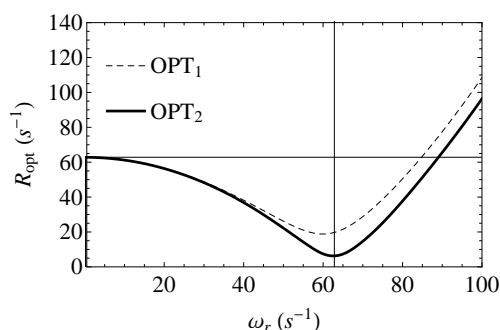


Slika 9: Optimirana absorbirana moč P_{opt} v odvisnosti od frekvence resonatorja pri treh različnih vrednostih parametra ε_n ; označena je frekvenca prostorskega načina $\omega_n = 20\pi \text{ s}^{-1} \approx 63 \text{ s}^{-1}$.

V realnih okoliščinah širokopasovnih zvočil je ustrežnejša mera za absorpcijo integral absorbirane akustične moči čez frekvenčno območje, ki zajema resonanco prostora:

$$E[\omega_1, \omega_2] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} P d\omega. \quad (23)$$

Obe meri za absorbirano akustično moč nam ne dasta

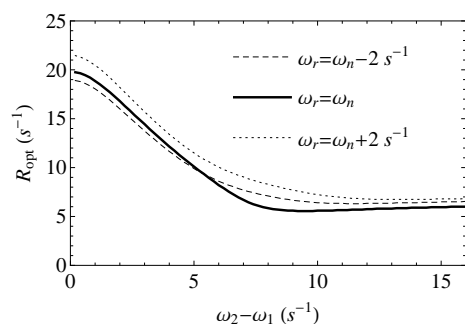


Slika 10: Optimalni koeficient dušenja R_{opt} v odvisnosti od frekvence resonatorja za obe meri absorpcije akustične moči, označeni z OPT₁ iz enačbe (15) in OPT₂ iz enačbe (23); označena je frekvenca prostorskega načina $\omega_n = 20\pi \text{ s}^{-1} \approx 63 \text{ s}^{-1}$.

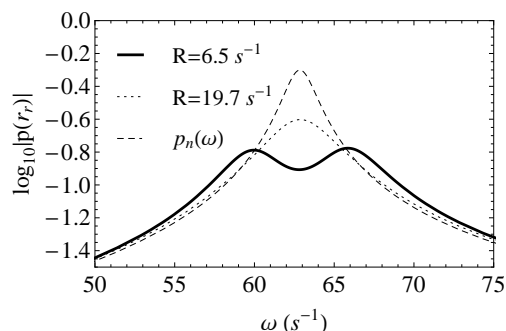
enakih optimalnih koeficientov dušenja. V primeru $\omega_n = \omega_r = \omega$, $c_n = 1 \text{ s}^{-1}$ in $\varepsilon_n = 0.10$ po prvi metodi dobimo $R_{opt} = 19.7 \text{ s}^{-1}$, po drugi pa $R_{opt} = 6.5 \text{ s}^{-1}$, kar je prikazano na sliki 10. Pri tem smo zajemali frekvenčni interval od $\omega = \omega_n - 20 \text{ s}^{-1}$ do $\omega = \omega_n + 20 \text{ s}^{-1}$. Izkazuje se, da je v drugem primeru resonančna krivulja v okolici resonančne frekvence bolj zglajena, kar prikazuje slika 12. S slike 11 je lepo razvidno, da dobimo v limiti $\omega_2 - \omega_1 \rightarrow 0$ enak rezultat kot z mero (15), in sicer $R_{opt} = 19.7 \text{ s}^{-1}$ iz enačbe (19).

3 Ugotovitve

Obravnavali smo interakcijo Helmholtzevega resonatorja z lastnimi načini prostora. Na eno od lastnih frekvenc ω_n prostora uglašeni resonator to resonanco razcepi na dve.



Slika 11: Optimalni koeficient dušenja R_{opt} v odvisnosti od širine intervala $\omega_2 - \omega_1$ okoli resonančne frekvence ω_n pri treh različnih frekvencah resonatorja.



Slika 12: Logaritem absolutne vrednosti tlaka $p(x_r, \omega)$ v odvisnosti od frekvence pri dveh različnih vrednostih dušenja R ter primerjava z nemotenim načinom (17).

Prek mere za absorpcijo moči smo ugotovili, da obstaja koeficient dušenja resonatorja R , pri katerem je ta maksimalna. Predstavili smo odvisnost optimalnega koeficienta dušenja R_{opt} od sklopitvenega parametra ε_n , koeficienta dušenja lastnega načina prostora c_n ter frekvence resonatorja ω_r . R_{opt} ni bistveno odvisen od dušenja prostora c_n , če je sklopitveni parameter ε_n dovolj majhen in če se frekvenca resonatorja ne razlikuje bistveno od resonančne frekvence prostora. Predstavili smo tudi v praksi ustrežnejšo mero za absorpcijo, ki ni odvisna od frekvence. Opazili smo, da je v tem primeru koeficient optimalnega dušenja manjši in v okolici resonančne frekvence prostora bolj zgladi amplitudo tlaka.

Pri sklopitvi Helmholtzevega resonatorja s prostorom je ključnega pomena sklopitveni parameter. Ta vsebuje tudi odvisnost od lege resonatorja v prostoru, na kar pa se v tokratni raziskavi nismo osredotočili.

Literatura

- [1] F. J. Fahy in C. Schofield: A note on the interaction between a Helmholtz resonator and an acoustic mode of an enclosure, *Journal of Sound and Vibration* (1980) **72**(3), 365-378.
- [2] Deyu Li, Li Cheng: Acoustically coupled model of an enclosure and a Helmholtz resonator array, *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007) 272-288.