

# Nevronske mreže za iskanje binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo

Jan Popič, Janez Brest, Borko Bošković

Laboratorij za računalniške arhitekture in jezike, Inštitut za računalništvo,  
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru,  
Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija  
E-pošta: jan.popic@student.um.si

## Neural networks for the search of low auto-correlation binary sequences

*The use of neural networks is getting more widespread by the day, but their use for the search of binary sequences with low auto-correlation has not yet been researched. Such binary sequences are used in various scientific applications, ranging from telecommunications to radar technology. We present a novel approach that utilizes neural networks to construct one half of the sequence, while a self-avoiding walk is used to explore the other half. This approach is tested on sequences of lengths 31 and 41, respectively. We evaluate our approach with two different neural networks and compare them to the approach that is based only on skew-symmetry. Results show that the search with our approach often explored the search space with better sequences compared to the skew-symmetry and is therefore more efficient.*

## 1 Uvod

Nevronske mreže nedvomno postajajo vse bolj popularne in pogosto utirajo svojo uporabo na mnoga področja zaradi svojega širokega spektra uporabe. Kljub temu se najdejo raziskovalna področja, kjer uporaba nevronske mreže še ni bila preizkušena. Eno izmed takšnih področij je problem binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo (ang. *low autocorrelation binary sequence* – LABS). Avtorji so v [10] sicer uporabili nevronske mreže kot dopolnitev iskanja s tabuji pri sekvencah LABS, kjer so s pomočjo nevronske mreže optimizirali parameter algoritma, vendar sama nevronska mreža ni bila vključena v proces gradnje sekvence.

Binarne sekvence z nizko avtokorelacijo so zaradi svojih specifičnih in ugodnih lastnosti uporabne na mnogih znanstvenih področjih. Uporabljajo se pri telekomunikacijah in pri radarski tehnologiji [9, 5], v matematiki [7, 2], v fiziki [1] in na mnogih drugih področjih [6].

Raziskovalci so s pomočjo izčrpnega iskanja uspeli najti optimalne sekvence za majhne dolžine sekvenc ( $L \leq 66$ ) [8], vendar takšen pristop odpove pri sekvencah večjih dolžin. Zaradi težavnosti problema so raziskovalci vpeljali nekatere omejitve, predpostavke in predstavitve problema, s katerimi so omogočili učinkovitejše iskanje daljših sekvenc. Ena izmed takšnih omejitev je

t.i. popačena simetrija (ang. *skew-symmetry*). Popačeno simetrične rešitve lihih dolžin pogosto omogočajo dobre rezultate, vendar rešitve niso nujno optimalne. Avtorji so v članku [8] pokazali, da je od 31 optimalnih lihih sekvenc z  $L \leq 65$  bilo 21 takšnih, ki so popačeno simetrične.

Zaradi velikega iskalnega prostora algoritmi za reševanje problema LABS pogosto uporabljajo nekakšno obliko lokalnega iskanja. Tako so tudi avtorji v [3] analizirali tri različne algoritme za iskanje sekvenc LABS: *lssMAts*, ki temelji na memetskem algoritmu; *lssRRts*, ki temelji na iskanju s tabuji ter *lssOrel*, ki temelji na samoizogibnem sprehodu. Avtorji so v [4] predlagali alternativni algoritem, ki shranjuje veliko število rešitev in s pomočjo teh rešitev usmerja proces iskanja.

V tem prispevku predstavimo nov pristop k iskanju binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo, ki ga v literaturi nismo zasledili. Ta pristop polovico sekvence določa s pomočjo nevronske mreže. Naša predpostavka je, da bomo s pomočjo takšnega pristopa lahko poiskovali binarne sekvence, ki imajo boljše (nižjo) avtokorelacijo.

Preostanek prispevka je sledeč. Poglavje 2 služi za formalen opis problema binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo. V poglavju 3 predstavimo predlagan pristop, ki vključuje nevronske mreže v iskalni algoritem. Poglavje 4 opiše naš eksperiment in predstavi dobljene rezultate, v poglavju 5 pa povzamemo naše delo.

## 2 Opis problema

Problem binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo predstavlja iskanje takšne binarne sekvence  $S = \{s_1 s_2 s_3 \dots s_L\}$ ;  $s \in \{-1, +1\}$  dolžine  $L$ , da je njena energija  $E$ , prikazana v enačbi (1), čim manjša:

$$E(S) = \sum_{k=1}^{L-1} C_k^2(S); \quad C_k(S) = \sum_{i=1}^{L-k} s_i s_{i+k} \quad (1)$$

Raziskovalci pogosto namesto energije  $E(S)$  analizirajo in poročajo t.i. faktor  $F(S)$  (enačba (2)), saj ima lepo lastnost, da konvergira k določeni vrednosti ob naraščanju dolžine sekvence. Tako raziskovalci analizirajo njihove algoritme v odvisnosti od dolžine sekvence.

$$F(S) = \frac{L^2}{2E(S)} \quad (2)$$

Kot omenjeno v prejšnjem poglavju, je popačena simetrija pogosto uporabljen pristop za zmanjševanje iskalnega prostora pri reševanju problema LABS. Za doseglo popačene simetrije, mora biti sekvenca lihe dolžine  $L = 2k + 1$  in mora zadostiti pogoju v enačbi (3).

$$s_{k+i} = (-1)^i s_{k-i}; \quad i = 1, 2, \dots, k - 1 \quad (3)$$

Posledično se pri uporabi simetrije dimenzija iskalnega prostora prepolovi. Preiskuje se namreč zgolj prva polovica sekvence, druga polovica pa se nastavi na simetrične vrednosti.

### 3 Opis pristopa

Samoizogibni sprehod (ang. *Self-Avoiding Walk – SAW*) se je v mnogih raziskavah izkazal za primeren pristop, zato smo ga uporabili tudi mi. Ker je naš cilj zgolj analiza uporabe nevronske mreže v procesu iskanja sekvenc LABS, smo se v tej raziskavi omejili zgolj na sekvence dolžine  $L = 31$  in  $L = 41$ , kar nam omogoča dovolj hiter razvoj, saj je iskalni prostor vseeno dovolj velik ( $2^{15}$  in  $2^{20}$ ) za analizo iskanja. Tako smo v SAW vključili nevronske mreže, ki skrbijo za generiranje druge polovice sekvence glede na prvo polovico, ki se preiskuje z iskalnim algoritmom. Pseudokod iskalnega algoritma prikazuje algoritem 1.

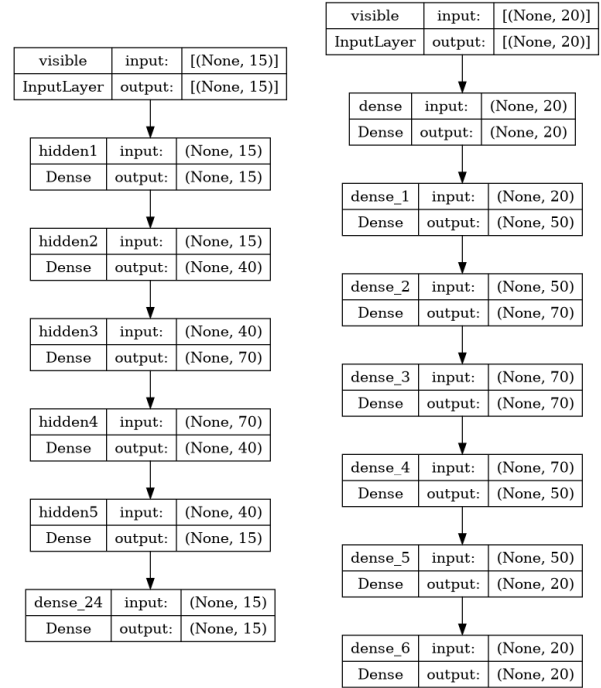
```

1: procedure SAW( $S, L, iter, rule$ )
2:  $pivot_{seq} \leftarrow S; \quad best_e \leftarrow E(S)$ 
3:  $mid \leftarrow (L - 1)/2$ 
4:  $visited = \emptyset$ 
5: for  $it \in [1, iter]$  do
6:    $s \leftarrow pivot_{seq}; \quad e \leftarrow 0$ 
7:   for  $j \in [0, mid]$  do
8:      $Flip(s, j)$  //obrnemo j-ti bit
9:     if  $rule$  is SYMMETRY then
10:      Drugo polovico sekvence generiraj
      s pravilom simetrije
11:    else if  $rule$  is NN then
12:      Drugo polovico sekvence generiraj
      z nevronske mreže
13:    else
14:      Drugo polovico sekvence generiraj
      naključno
15:    end if
16:    if  $s \notin visited$  then
17:       $eval = E(s)$ 
18:      if  $e = 0$  or  $eval < e$  then
19:         $e \leftarrow eval; \quad pivot_{seq} \leftarrow s$ 
20:      end if
21:    end if
22:     $Flip(s, j)$  //povrnemo j-ti bit
23:  end for
24:   $visited = visited \cup \{pivot_{seq}\}$ 
25:  Beleži globalno najboljšo rešitev
26: end for
27: end procedure

```

**Algoritem 1:** Opis implementacije algoritma SAW.

Ker obstoječi pristopi in algoritmi pri problemu LABS za reševanje lihih dolžin sekvenc uporabljajo pravilno popačene simetrije, smo v našem pristopu nevronske



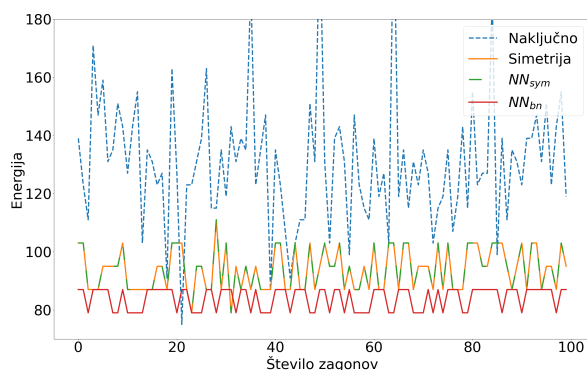
Slika 1: Struktura nevronske mreže za  $L = 31$  (levo) in  $L = 41$  (desno).

mrežo zasnovali tako, da tudi ta zgradi drugo polovico sekvence glede na prvo polovico sekvence. V našem pristopu je zato uporabljena polno povezana nevronska mreža, katere arhitektura (število vhodnih, skritih in izhodnih slojev) je odvisna od dolžine sekvence in je bila določena s preiskovanjem. Arhitektura bo podrobneje opisana v poglavju 4.

Za aktivacijsko funkcijo skritih slojev je bila izbrana aktivacijska funkcija ReLu, za aktivacijo na izhodnem sloju pa je bila izbrana sigmoidna aktivacijska funkcija. Sigmoidna aktivacijska funkcija na izhodnem sloju ima primerne lastnosti za naše potrebe, saj so izhodi nevronske mreže realna števila na intervalu  $[0, 1]$ , kar nam omogoča enostavno preslikavo izhodov nevronske mreže v binarno zaporedje bitov. Za preslikavo izhodov nevronske mreže v binarno sekvenco zadostuje že preprosto zaokroževanje na najbližje celo število. Funkcija izgube, ki je potrebna za učenje nevronske mreže, je vsota kvadratnih napak med pričakovanimi izhodi (binarno zaporedje) in dejanskimi izhodi (realne vrednosti na intervalu  $[0, 1]$ ).

Nevronska mreža je bila učena s pomočjo nadzorovanega učenja in optimizatorja Adam. Vhodni podatki za učenje so v našem primeru predstavljali prvo polovico sekvence  $S_{in} = \{s_1 s_2 \dots s_{(L-1)/2}\}$ , pričakovani izhodi pa so bili druga polovica sekvence  $S_{out} = \{s_{(L-1)/2+1} \dots s_L\}$ .

Za potrebe nadzorovanega učenja nevronske mreže smo za vsako izbrano dolžino sekvence pripravili učno množico, ki je vsebovala pare vhodnih podatkov in njihovih pričakovanih izhodov. Učno množico, ki smo jo poimenovali  $UM_{sym}$ , smo sestavili tako, da smo naključno generirali unikatne polovice sekvenc za vhode pri učenju, njihove pripadajoče pričakovane



Slika 2: Analiza energije pri SAW za  $L = 31$ .

izhode pa smo zgenerirali glede na pravilo popačene simetrije (enačba (3)). Pravilo popačene simetrije je sicer matematično preprosta preslikava, a smo jo kljub temu vključili v našo analizo.

Ker nas zanima, ali se lahko nevronska mreža nauči tudi povezav med podatki, ki nimajo tako trivialne preslikave kot pri popačeni simetriji, smo ustvarili tudi drugo učno množico  $UM_{bn}$ . Vhode pri tej učni množici smo ponovno, tako kot pri  $UM_{sym}$ , naključno generirali. Pripadajoče pričakovane izhode smo ustvarili tako, da smo najprej generirali simetrično polovico vhoda, nato pa smo med simetrično polovico sekvence in njenimi sosedi (od simetrične polovice se razlikujejo za 1 bit) izbrali najboljšo polovico sekvence. Takšna učna množica vsebuje boljše rešitve kot uporaba zgolj pravil simetrije.

## 4 Eksperiment in rezultati

Za vsako izbrano dolžino binarne sekvence ( $L = 31$  in  $L = 41$ ) smo naučili dve, po strukturi enaki, nevronske mreže.  $NN_{sym}$  je bila naučena na učni množici simetrije  $UM_{sym}$  in  $NN_{bn}$ , ki je bila naučena na učni množici z najboljšimi sosedi  $UM_{bn}$ . Vsako nevronske mreže smo ovrednotili s 100 neodvisnimi zagoni algoritma SAW, za primerjavo pa smo dodali tudi 100 zagonov algoritma z uporabo pravila popačene simetrije (vrstica 10 v algoritmu 1) in 100 zagonov algoritma z uporabo naključno generirane polovice (vrstica 14 v algoritmu 1). Posamezen zagon algoritma se je začel z naključno začetno sekvenco in izvedel  $iter = 8 * (\frac{L+1}{2})$  iteracij. Začetna sekvenca je bila v vsakem zagonu enaka za vse 4 scenarije. Po koncu iteracij je algoritem vrnil najboljšo najdeno rešitev in prešel na nov zagon. Tako smo za vsako dolžino pridobili  $100 \times 4$  meritev. Dobljene vrednosti energij smo statistično analizirali z Wilcoxonovim testom med posameznimi pari scenarijev.

### 4.1 Sekvence dolžine 31

Pri sekvencah dolžine 31, je učna množica vsebovala 32.768 parov vhodov in izhodov, od tega je bilo 80 % množice uporabljeno za učenje, preostalih 20 % pa za validacijo v fazi učenja. Testna množica v našem pristopu ni potrebna, saj bomo nevronske mreže analizirali neposredno znotraj iskalnega algoritma.

Nevronska mreža je vsebovala 7 polnopravilnih slojev: vhodni, izhodni in 5 skritih slojev. Arhitektura

Tabela 1: Rezultati p-vrednosti za dolžino 31, pridobljeni z Wilcoxonovim testom.

	RND	SYM	$NN_{sym}$	$NN_{bn}$
RND	/	1,22e-17	1,22e-17	6,36e-18
SYM		/	NA	1,95e-08
$NN_{sym}$			/	1,95e-08
$NN_{bn}$				/

nevronske mreže je podrobneje prikazana na levi strani slike 1. Učenje je potekalo v paketnem načinu (ang. *batch*), pri čemer je bila velikost paketa 32, hitrost učenja pa 0,0005.

Nevronske mreže  $NN_{sym}$  smo učili 1000 epoh, vendar se je učenje predčasno zaključilo pri približno 300 epohah zaradi stagniranja učenja. Točnost, dosežena po koncu učenja, ki je trajalo približno 11 minut, je bila 99 %, vrednost izgube pa  $1,55 \times 10^{-11}$ . Nevronske mreže  $NN_{bn}$  smo učili 2000 epoh, pri čemer ni prišlo do predčasnega konca učenja, saj je funkcija izgube počasi, a vztrajno padala. Točnost po učenju  $NN_{bn}$ , ki je trajalo 1 uro in 10 minut, je znašala 13 %, vrednost funkcije izgube pa 0,62.

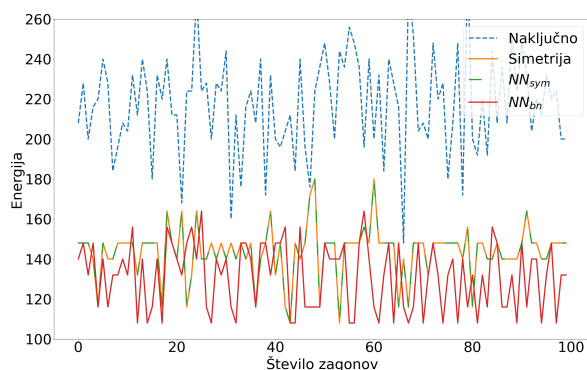
Na sliki 2 so prikazane dobljene energije za vseh 100 zagonov SAW algoritma. Iz rezultatov je razvidno, da med uporabo pravila simetrije (oranžna črta) in uporabo nevronske mreže  $NN_{sym}$  (zeleno črtkana črta) ni razlik, saj se na grafu popolnoma prekrivata. Iz tega je razvidno, da se je  $NN_{sym}$  popolnoma naučila pravila simetrije, kar tudi dodatno potrjuje doseženo 99 % točnost pri učenju. Iz rezultatov je prav tako razvidno, da je nevronska mreža  $NN_{bn}$  pogosto dosegala boljše rezultate kot  $NN_{sym}$ . Vrednost energije 79 je kombinacija SAW in  $NN_{sym}$  dosegla zgolj 2-krat, kombinacija SAW in  $NN_{bn}$  pa kar 38-krat. Povprečna vrednost energije pri uporabi  $NN_{sym}$  je bila 93,96, pri uporabi  $NN_{bn}$  pa 83,96, kar predstavlja 10,6 % izboljšanje. Za primerjavo je za  $L = 31$  najboljša znana energija 67 [8], vendar ta rešitev ni simetrična, torej je z uporabo pravil simetrije, ali pravil, ki izhajajo iz simetrije, ni mogoče doseči.

Za dodatno analizo rezultatov, smo nad dobljenimi meritvami izvedli Wilcoxonov statistični test. Rezultati Wilcoxonovega testa so po parih prikazani v tabeli 1. Iz rezultatov je razvidno, da je med vsemi pari z 99 % verjetnostjo razlika statistično signifikantna, saj je v vseh primerih p-vrednost manjša od 0,01. Izjema je le par  $SYM-NN_{sym}$ , kjer ni signifikantne razlike.

### 4.2 Sekvence dolžine 41

Učna množica za sekvence dolžine 41 je vsebovala 1.048.576 parov sekvenc, od tega je bilo 60 % učne množice uporabljene za učenje, 40 % pa za fazo validacije. S takšno delitvijo smo želeli preizkusiti, ali se nevronska mreža lahko tudi iz manjšega deleža celotnega iskalnega prostora nauči uporabnih preslikav. Nevronske mreže za dolžine sekvence 41 sta vsebovali 8 polnopravilnih slojev. Arhitektura takšne nevronske mreže je podrobneje prikazana na desni strani slike 1.

Učenje je ponovno potekalo v paketnem načinu s hitrostjo učenja 0,0005, tokrat je bila velikost paketa 64 za



Slika 3: Analiza energije pri SAW za  $L = 41$ .

$NN_{sym}$  ter 128 za  $NN_{bn}$ . Ker je učna množica pri  $L = 41$  precej večja kot pri  $L = 31$ , smo lahko nevronske mreže učili manj epoh. Tako smo za  $NN_{sym}$  namenili 300 epoh učenja, vendar se je učenje predčasno končalo po 50 epohah. To je trajalo približno pol ure, pri čemer smo dosegli 99,9 % točnost in vrednost izgube 0,007. Nevronska mreža  $NN_{bn}$  pa smo učili 500 epoh, za kar smo potrebovali približno 3 ure in 45 minut. Dosegli smo 9 % točnost, funkcija izgube pa je na koncu imela vrednost 0,7.

Slika 3 prikazuje dobljene energije pri 100 zagonih SAW algoritma za dolžino  $L = 41$ . Kot je razvidno iz rezultatov, sta tudi tukaj pristop s simetrijo in pristop z nevronske mreže  $NN_{sym}$ , ki je bila naučena na simetrijah, popolnoma enakovredna. Oba pristopa sta dosegla povprečno energijo 143,76, najnižjo vrednost, ki je bila 108, pa sta dosegla 2-krat. Pristop z  $NN_{bn}$  je dosegel povprečno energijo 131,19, najnižjo vrednost, ki je ponovno bila 108, pa je dosegel kar 19-krat. Povprečna energija dobljena z  $NN_{bn}$  je bila torej za 8,7 % boljše kot energija dobljena z  $NN_{sym}$ . Za sekvence dolžine 41 je najboljša znana energija 108 [8]. Torej smo z  $NN_{bn}$  uspeli doseči optimalno energijo večkrat. To nakazuje, da je algoritem, ob uporabi nevronske mreže  $NN_{bn}$ , preiskoval prostor, ki vsebuje sekvence z boljšo energijo v primerjavi s pravilom simetrije oziroma  $NN_{sym}$ , kar potrjuje našo hipotezo.

Iz rezultatov Wilcoxonovega statističnega testa, ki so prikazani v tabeli 2, je ponovno mogoče razbrati, da je med vsemi pari statistično signifikantna razlika z verjetnostjo 99 %, razen med parom  $SYM-NN_{sym}$ .

## 5 Zaključek

V članku je predstavljen nov pristop za iskanje binarnih sekvenc z nizko avtokorelacijo, ki temelji na algoritmu samoizogibnega sprehoda v kombinaciji z nevronske mreže. V našem pristopu nevronska mreža na vходу dobi prvo polovico sekvence, njen izhod pa predstavlja drugo polovico sekvence. Nevronska mreža  $NN_{sym}$  je bila učena, da posnema pravila popačene simetrije. Rezultati so pokazali, da se je ta pravila hitro naučila, kar je bilo pričakovano, saj je simetrija matematično preprosta operacija.

Pristop z uporabo samoizogibnega sprehoda in nevronske mreže  $NN_{bn}$ , ki se je učila na izboljšani učni množici  $UM_{bn}$ , se je izkazal kot boljši v primerjavi s popačeno simetrijo, kljub slabši doseženi točnosti

Tabela 2: Rezultati p-vrednosti za dolžino 41, pridobljeni z Wilcoxonovim testom.

/	RND	SYM	$NN_{sym}$	$NN_{bn}$
RND	/	3,79e-18	3,79e-18	3,75e-18
SYM		/	NA	2,69e-07
$NN_{sym}$			/	2,69e-07
$NN_{bn}$				/

v fazi učenja. Rezultati, pridobljeni znotraj iskalnega algoritma, so imeli manjšo povprečno energijo, prav tako pa je dobre rešitve našel pogosteje kot pristop z  $NN_{sym}$ . To nakazuje, da tudi učna množica, katera nima tako trivialnih preslikav, kot je pravilo popačene simetrije, vsebuje znanje in je primerna za učenje nevronske mreže. Iz dobrih rezultatov v eksperimentih in slabših vrednostih pri metrikah točnosti in izgube v fazi učenja, je mogoče sklepati, da se je nevronska mreža iz  $UM_{bn}$  naučila dobrih preslikav, ki pa niso točno takšne kot v učni množici.

V nadaljnjem delu načrtujemo preizkusiti naš pristop na daljših sekvencah, uporabiti drugačne tipe nevronske mreže in drugačne pristope k učenju. Dodatno pa načrtujemo analizirati preslikave, ki se jih je naučila  $NN_{bn}$ .

## Zahvala

J. Brest in B. Bošković priznavata financiranje prispevka s strani Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, raziskovalni program P2-0041 – Računalniški sistemi, metodologije in inteligentne storitve.

## Literatura

- [1] J. Bernasconi. Low autocorrelation binary sequences: statistical mechanics and configuration space analysis. *Journal de Physique*, 48(4):559–567, 1987.
- [2] P. Borwein. *Computational excursions in analysis and number theory*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [3] B. Bošković, F. Brglez in J. Brest. Low-autocorrelation binary sequences: On improved merit factors and runtime predictions to achieve them. *Applied Soft Computing*, 56:262–285, 2017.
- [4] J. Brest in B. Bošković. A heuristic algorithm for a low autocorrelation binary sequence problem with odd length and high merit factor. *IEEE Access*, str. 4127–4134 2018.
- [5] M. Golay. A class of finite binary sequences with alternate autocorrelation values equal to zero (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(3):449–450, 1972.
- [6] J. Jedwab. A survey of the merit factor problem for binary sequences. V: Tor Helleseeth, Dilip Sarwate, Hong-Yeop Song, and Kyeongcheol Yang, ur., *Sequences and Their Applications - SETA 2004*, str. 30–55, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Berlin Heidelberg.
- [7] J.E. Littlewood. Some problems in real and complex analysis, health mathematical monographs. *DC Heath and Company, Massachusetts*, 1968.
- [8] T. Packebusch in S. Mertens. Low autocorrelation binary sequences. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(16):165001, mar 2016.
- [9] I. A. Pasha, P. S. Moharir in N. Sudarshan Rao. Bi-alphabetic pulse compression radar signal design. *Sadhana*, 25:481–488, 2000.
- [10] D. Žurek, M. Pietroń, K. Piętak in M. Kisiel-Dorohinicki. A deep neural network as a tabu support in solving LABS problem. In *Computational Science – ICCS 2022*, str. 237–243, Cham, 2022. Springer International Publishing.